Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction (que l'on note y ou z) et qui lie cette fonction y et les dérivées successives de y. On peut noter qu'en physique un grand nombre de lois s'écrivent sous forme d'égalités différentielles.

I. $y' = a\,y$ $\boxed{y = Ce^{ax}}$

II. $y' = a\,y + b$ $\boxed{y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}}$

III. $y'' + py' + qy = 0$

Méthode de résolution :
On associe à cette équation différentielle son équation caractéristique : $r^2 + pr + q = 0$ dont les racines r_1 et r_2 peuvent être réelles ou complexes.

1er cas : r_1 et r_2 sont deux réels distincts alors :

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

2e cas : $r_1 = r_2$ alors :

$$y = e^{r_1x}\left(C_1x + C_2\right)$$

3e cas : r_1 et r_2 sont deux nombres complexes.

$$y = e^{ax}\left(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx)\right)$$

(En posant $r_1 = a + ib$ et $r_2 = a - ib$)

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$
L'équation caractéristique est de la forme : $r^2 - 5r + 6 = 0$*, elle admet pour solutions :* $r_1 = 3$ *et* $r_2 = 2$.
Nous sommes dans le premier cas de résolution, les solutions de l'équation différentielle sont définies par :
$y = C_1\,e^{3x} + C_2\,e^{2x}$ *où* C_1 *et* C_2 *sont deux constantes décrivant chacune* ¡ .

2. $y'' + 2y' + 5y = 0$
L'équation caractéristique est de la forme : $r^2 + 2r + 5 = 0$*, elle admet pour solutions deux nombres complexes :* $r_1 = -1 + 2i$ *et* $r_2 = -1 - 2i$. *Nous sommes dans le troisième cas de résolution, les solutions de l'équation différentielle sont définies par :*
$y = e^{-x}\,(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$ *où* C_1 *et* C_2 *sont deux constantes décrivant chacune* ¡ .

IV. $y'' + py' + qy = f(x)$

Si f(x) =	Alors une solution particulière de $y'' + py' + qy = f(x)$ est :
A →	B
$A\cos(ax)$ →	$B\cos(ax) + C\sin(ax)$
$A\sin(ax)$ →	$B\cos(ax) + C\sin(ax)$
Ae^{ax} →	Be^{ax}

V. Méthode de Lagrange (Variation de la constante)
Voir dossier spécifique

VI. Equations différentielles du premier ordre de Bernouilli

Elles ont pour forme : $\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^n$ Méthode : effectuer le changement de variable : $u = y^{1-n}$

1. Vérifier si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) :

a. f(x) = **Erreur !**+ b (E) : y'' + **Erreur !**y' = 0 **b.** $f(x) = k(1 + x)^2$ (E) : $(1 + x)y' = 2y$

c. $f(x) = ke^{-x} + ax + b$ (E) ; $y''' + y'' = 0$ **d.** $f(t) = Ae^{2t} + Be^{3t}$ (E) : $y'' + 5y' + 6y = 0$

2. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

a. $xy' = 1$ (avec $x > 0$) **b.** $y' + x + \sin x = 0$ **c.** $(x^2 + 1)y' = x$ **d.** $2y' + y = 0$

e. $3y = y'$ **f.** $2y' + y - 6 = 0$ **g.** **Erreur !**= 5 **h.** $2y + y' = 3$

i. $y' = 1 - 3y$ **j.** $y'' = x^2 + 1$ **k.** $y'' + \sin(2x + 3) = 0$ **l.** $2y'' + e^{3x+2} = 0$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $3y' - 2y = 0$ et $y(2) = e^2$ **b.** $y' - 2y = 0$ et $y(-1) = -3$

c. $y'x^2 = 1$ et $y(1) = 3$ **d.** $y' + 3y = 0$ et $y(1) = 1$

e. $y' = \cos 3x$ et $y(0) = 1$ **f.** $y' = x^2 + x + e^{-x}$ et $y(0) = -5$

4. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

a. $y'' = 1$ **b.** $y'' = 2x$ **c.** $y'' = 2y'$

d. $y'' + y = 0$ **e.** $3y'' + 5y = 0$ **f.** $y'' + y' + y = 0$

g. $y'' - 2y' - 8y = 0$ **h.** $y'' + 2y' - 3y = 0$

5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y'' = 3y$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -\sqrt{3}$ **b.** $4y'' + 9y = 0$ sachant que $y(\pi) = 2$ et $y'(\pi) = 0$

c. $y'' = \cos 2x$ sachant que $y(0) = 1{,}5$ et $y'(0) = 2$ **d.** $y'' = 4y$ sachant que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$

e. $y'' = 0{,}5x + 1 + \sin 2x$ sachant que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ **f.** $y'' = e^{2x}$ sachant que $y(1) = 0$ et $y'(1) = 0$

6.

a. Résoudre l'équation différentielle (E) : $\mathbf{y'' - 4y' + 4y = 0}$.

b. Déterminer la fonction f solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0,1) et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

7.

a. Résoudre l'équation différentielle (E) : $\mathbf{y'' - 6y' + 8y = 0}$.

b. Déterminer la fonction f solutions de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0,-1) et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. **a.** On pose $y=f(x)=\frac{a}{x}+b$, on calcule ensuite : $y'=\frac{-a}{x^2}$ et $y''=\frac{2a}{x^3}$. On vérifie ensuite : $y''+\frac{2}{x}y'=\frac{2a}{x^3}+\frac{2}{x}\times\frac{-a}{x^2}=0$.
La fonction f vérifie (E).

b. Si $y=k(1+x)^2$ alors $y'=2k(1+x)\Rightarrow \mathbf{(1+x)y'}=(1+x)2k(1+x)=2k(1+x)^2=\mathbf{2y}$. La fonction f vérifie (E).

c. Si $y=ke^{-x}+ax+b$ alors $y'=-ke^{-x}+a$ puis $y''=ke^{-x}$ et $y'''=-ke^{-x}$. On vérifie : $\mathbf{y'''+y''}=-ke^{-x}+ke^{-x}=\mathbf{0}$
La fonction f vérifie (E).

d. Si $y=Ae^{2t}+Be^{3t}$ alors $y'=2Ae^{2t}+3Be^{3t}\Rightarrow y''=4Ae^{2t}+9Be^{3t}$. On vérifie : $y''+5y'+6y=4Ae^{2t}+9Be^{3t}+5\left(2Ae^{2t}+3Be^{3t}\right)+6\left(Ae^{2t}+Be^{3t}\right)$
C'est-à-dire : $\mathbf{y''+5y'+6y}=20Ae^{2t}+30Be^{3t}\neq\mathbf{0}$ f ne vérifie pas(E).

e. Si $y=\left(x^2+4x+3\right)e^{-x}$ alors $y'=(2x+4)e^{-x}+\left(x^2+4x+3\right)\left(-e^{-x}\right)=\left(-x^2-2x+1\right)e^{-x}$
$y''=(-2x-2)e^{-x}+\left(-x^2-2x+1\right)\left(-e^{-x}\right)=\left(x^2-3\right)e^{-x}$, on vérifie ensuite :
$\mathbf{y''+2y'+y}=\left(x^2-3\right)e^{-x}+2\left(\left(-x^2-2x+1\right)e^{-x}\right)+\left(x^2+4x+3\right)e^{-x}=\left(x^2-3-2x^2-4x+2+x^2+4x+3\right)e^{-x}=\mathbf{2e^{-x}}$ La fonction f vérifie (E).

2.

a. $xy'=1\Rightarrow y'=\frac{1}{x}\Rightarrow \mathbf{y=\ln x+C}$ Equation différentielle du type $y'=f(x)\Rightarrow y=\int f(x)dx+C$

b. $y'+x+\sin x=0\Rightarrow y'=-x-\sin x\Rightarrow \mathbf{y=-\frac{1}{2}x^2+\cos x+C}$ Equation différentielle du type $y'=f(x)\Rightarrow y=\int f(x)dx+C$

c. $\left(x^2+1\right)y'=x\Rightarrow y'=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow \mathbf{y=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C}$ Equation différentielle du type $y'=f(x)\Rightarrow y=\int f(x)dx+C$

d. $2y'+y=0\Rightarrow y'=-\frac{1}{2}y\Rightarrow \mathbf{y=Ce^{-\frac{1}{2}x}}$ Equation différentielle du type I : $y'=ay\Rightarrow y=Ce^{ax}$

e. $3y=y'\Rightarrow \mathbf{y=Ce^{3x}}$ Equation différentielle du type I : $y'=ay\Rightarrow y=Ce^{ax}$

f. $2y'+y-6=0\Rightarrow y'=\frac{-1}{2}y+6\Rightarrow \mathbf{y=Ce^{\frac{-1}{2}x}+6}$ Equation différentielle du type II : $y'=ay+b\Rightarrow y=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$

g. $\frac{y'}{y}=5\Rightarrow y'=5y\Rightarrow \mathbf{y=Ce^{5x}}$ Equation différentielle du type I $y'=ay\Rightarrow y=Ce^{ax}$

h. $2y+y'=3\Rightarrow y'=-2y+3\Rightarrow \mathbf{y=Ce^{-2x}+\frac{3}{2}}$ Equation différentielle du type II : $y'=ay+b\Rightarrow y=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$

i. $y'=1-3y\Rightarrow y=Ce^{-3x}+\frac{1}{3}$ Equation différentielle du type II : $y'=ay+b\Rightarrow y=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$

j. $y''=x^2+1\Rightarrow y'=\frac{1}{3}x^3+x+C_1\Rightarrow \mathbf{y=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2}$ Equation différentielle du type $y'=f(x)\Rightarrow y=\int f(x)dx+C$

k. $y''+\sin(2x+3)=0\Rightarrow y''=-\sin(2x+3)\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\cos(2x+3)+C_1\Rightarrow \mathbf{y=\frac{1}{4}\sin(2x+3)+C_1x+C_2}$
Equation différentielle du type $y''=f(x)\Rightarrow y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C$

l. $2y''+e^{3x+2}=0\Rightarrow y''=-\frac{1}{2}e^{3x+2}\Rightarrow y'=-\frac{1}{6}e^{3x+2}+C_1\Rightarrow \mathbf{y=-\frac{1}{18}e^{3x+2}+C_1x+C_2}$
Equation différentielle du type $y''=f(x)\Rightarrow y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C$

---

3. **a.** Comme $y(2)=e^2$ alors $e^2 = Ce^{\frac{2}{3}\times 2} \Rightarrow C = e^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = e^{\frac{2}{3}}e^{\frac{2}{3}x} \Rightarrow \mathbf{y = e^{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}}$

b. $y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = 2y \Rightarrow y = Ce^{2x}$. Comme y(-1) = -3 alors $-3 = Ce^{2(-1)} \Rightarrow C = -3e^2 \Rightarrow y = -3e^2e^{2x} \Rightarrow \mathbf{y = -3e^{2x+2}}$

c. $y'x^2 = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y = \frac{-1}{x} + C.$ Comme y(1) = 3 alors $3 = \frac{-1}{1} + C \Rightarrow C = 4 \Rightarrow \mathbf{y = \frac{-1}{x} + 4}$

d. $y' + 3y = 0 \Rightarrow y' = -3y \Rightarrow y = Ce^{-3x}$. Comme y(1) = 1 alors $1 = Ce^{-3(1)} \Rightarrow C = e^3 \Rightarrow y = e^3e^{-3x} \Rightarrow \mathbf{y = e^{3-3x}}$

e. $y' = \cos 3x \Rightarrow y = \frac{1}{3}\sin 3x + C$ Comme y(0) = 1 alors $1 = \frac{1}{3}\sin(0) + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \mathbf{y = \frac{1}{3}\sin 3x + 1}$

f. $y' = x^2 + x + e^{-x} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - e^{-x} + C$ Comme y(0) = -5 alors $-5 = -e^0 + C \Rightarrow C = -4 \Rightarrow \mathbf{y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - e^{-x} - 4}$

---

4. **a.** $y'' = 1 \Rightarrow y' = x + C_1 \Rightarrow \mathbf{y = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2}$ **b.** $y'' = 2x \Rightarrow y' = x^2 + C_1 \Rightarrow \mathbf{y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2}$

c. $y'' = 2y' \Rightarrow y'' - 2y' = 0$ Equation caractéristique : $r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0$ et $r_2 = 2 \Rightarrow y = C_1e^{0.x} + C_2e^{2x} \Rightarrow \mathbf{y = C_1 + C_2e^{2x}}$

d. $y'' + y = 0$ Equation caractéristique : $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = i$ et $r_2 = -i \Rightarrow y = e^{0.x}(C_1\cos x + C_2\sin x) \Rightarrow \mathbf{y = C_1\cos x + C_2\sin x}$

e. $3y'' + 5y = 0$ Equation caractéristique : $3r^2 + 5 = 0 \Rightarrow r_1 = i\sqrt{\frac{5}{3}}$ et $r_2 = -i\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow \mathbf{y = C_1\cos\sqrt{\frac{5}{3}}\,x + C_2\sin\sqrt{\frac{5}{3}}\,x}$

f. $y'' + y' + y = 0$ Equation caract. : $r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathbf{y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$

g. $y'' - 2y' - 8y = 0$ Equation caractéristique : $r^2 - 2r - 8 = 0 \Rightarrow r_1 = 4$ et $r_2 = -2 \Rightarrow \mathbf{y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x}}$

h. $y'' + 2y' - 3y = 0$ Equation caractéristique : $r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1$ et $r_2 = -3 \Rightarrow \mathbf{y = C_1e^{x} + C_2e^{-3x}}$

---

5. **a.** $y'' = 3y \Rightarrow y'' - 3y = 0$ Equation caractéristique : $r^2 - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = \sqrt{3}$ et $r_2 = -\sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{y = C_1e^{\sqrt{3}x} + C_2e^{-\sqrt{3}x}}$

Et $\begin{cases} \mathbf{y(0) = 1} \Rightarrow C_1e^0 + C_2e^0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1 \\ \mathbf{y'(0) = -\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}C_1e^0 - \sqrt{3}C_2e^0 = -\sqrt{3} \Rightarrow C_1 - C_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0$ et $C_2 = 1 \Rightarrow \mathbf{y = e^{-\sqrt{3}x}}$

b. $4y'' + 9y = 0$ Equation caractéristique : $4r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{3}{2}i$ et $r_2 = -\frac{3}{2}i \Rightarrow \mathbf{y = C_1\cos\frac{3}{2}x + C_2\sin\frac{3}{2}x}$

Et $\begin{cases} \mathbf{y(\pi) = 2} \Rightarrow C_1\cos\frac{3\pi}{2} + C_2\sin\frac{3\pi}{2} = 2 \Rightarrow C_1\times 0 + C_2\times(-1) = 2 \Rightarrow C_2 = -2 \\ \mathbf{y'(\pi) = 0} \Rightarrow -\frac{3}{2}C_1\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{2}C_2\cos\frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}C_1(-1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{y = -2\sin\frac{3}{2}x}$

c. $y'' = \cos 2x \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1 \Rightarrow \mathbf{y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2}$

Et $\begin{cases} \mathbf{y(0) = 1,5} \Rightarrow -\frac{1}{4}\cos(0) + C_1(0) + C_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{7}{4} \\ \mathbf{y'(0) = 2} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin(0) + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{y = -\frac{1}{4}\cos 2x + 2x + \frac{7}{4}}$

d. $\mathbf{y = \frac{5}{4}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{-2x}}$ **e.** $\mathbf{y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1 - \frac{1}{4}\sin 2x}$ **f.** $\mathbf{y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{e^2}{2}x + \frac{e^2}{4}}$

---

6. **a.** $y = (C_1x + C_2)e^{2x}$ **b.** $y = (1 - 2x)e^{2x}$

---

7. **a.** $y = C_1e^{4x} + C_2e^{2x}$ **b.** $y = e^{4x} - 2e^{2x}$